JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 7, 155–162 (1973)

Über einen Allgemeinen Satz vom Jackson-Typ*

WILHELM FORST

Fachbereich Mathematik, Universität Tübingen, Tübingen, West Germany

Communicated by G. Meinardus

Durch Jackson [1] wurde der Satz von Weierstrass für die polynomische Approximation in quantitativer Hinsicht verschärft. Allgemeiner als Jackson betrachten wir in dieser Arbeit beliebige Funktionensysteme in $L^p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ bzw. $C[a, b]$. Wie üblich beschreiben wir die Approximierbarkeit mittels Stetigkeitsmaßen und Differenzierbarkeitseigenschaften; nach einem Satz von Bernstein [3], p. 40–43 kann nämlich die quantitative Approximierbarkeit eines Elementes f aus einem Banach-Raum nur mittels eines Maßes beschrieben werden, welches von f abhängt. Damit für $L_k^p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ bzw. $C_k[a, b]$ bezüglich eines vorgegebenen Funktionensystems ein Satz vom Jackson-Typ gilt, muß dieses dicht sein in $L^p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ bzw. $C[a, b]$ und die Funktionen h_0, $h_1, \ldots, h_k$ $(h_\kappa(x) := x^\kappa)$ enthalten. Diese notwendigen Bedingungen sind bemerkenswerterweise bereits auch hinreichend.

Aufgrund dieser Überlegungen ist es sinnvoll, nach expliziten Approximierbarkeitsaussagen für die von Müntz [2] betrachteten Funktionensysteme $\{x^{\lambda_j}\}_0^\infty$ zu suchen, sofern dafür das von Müntz bewiesene Dichtheitskriterium erfüllt ist und die Zahlen $0, 1, \ldots, k$ in der Exponentenfolge $\{\lambda_j\}_0^\infty$ vorkommen. Über die Herleitung solcher Sätze vom Müntz-Jackson-Typ soll in einer späteren Arbeit berichtet werden.

1. STETIGKEITSMASSE, STECKLOV-FUNKTIONEN

Die folgenden Überlegungen beziehen sich auf die Räume $L^p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ bzw. $C[a, b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$. Als Norm verwenden wir für $f \in L^p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$

$$\|f\|_p := \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$$

bzw. für $f \in C[a, b]$

$$\|f\|_\infty := \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

* Die vorliegende Arbeit wurde von A. Schönhage angeregt. Für sein Interesse an ihrem Fortgang sowie seine zahlreichen fördernden Hinweise sei ihm herzlich gedankt.

In $L^p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ betrachten wir die Teilräume

$$L_k^p(a, b) := \begin{cases} L^p(a, b), \text{ falls } k = 0 \\ \{f \mid f \text{ absolut stetig in } [a, b], f' \in L_{k-1}^p(a, b)\}, \text{ falls } k \geqslant 1 \end{cases}$$

bzw. in $C[a, b]$ die Teilräume

$$C_k[a, b] := \begin{cases} C[a, b], \text{ falls } k = 0 \\ \{f \mid f \text{ differenzierbar in } [a, b], f' \in C_{k-1}[a, b]\}, \text{ falls } k \geqslant 1. \end{cases}$$

Dann bezeichne X_k^p für $1 \leqslant p < \infty$ die Menge $L_k^p(a, b)$ und für $p = \infty$ die Menge $C_k[a, b]$.

Mit dem durch

$$(T_u g)(x) := g(x + u)$$

gegebenen Shiftoperator T_u definieren wir für $f \in X_0^p$ und $t \geqslant 0$ als Stetigkeitsmodul von f den Ausdruck

$$\omega_p(f, t) := \sup_{|h| \leqslant t} \| T_h f - f \|_p ;$$

Timan [3], p. 94 folgend sei f außerhalb $[a, b]$ $(b - a)$-periodisch fortgesetzt, falls $f \in L^p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, bzw. außerhalb $[a, b]$ stetig konstant fortgesetzt, falls $f \in C[a, b]$. Nach [3], p. 96–103 gilt für den Stetigkeitsmodul folgender

HILFSSATZ 1. *Für $f \in X_0^p$ ist $\omega_p(f, t)$ stetig in* $[0, \infty)$.

Jeder Funktion $f \in X_k^p$ kann man für $h > 0$ eine Funktion $S_h f \in X_{k+1}^p$ zuordnen, die in einem gewissen Sinne "nahe" bei f liegt und deren Abstand mittels des Stetigkeitsmoduls abgeschätzt werden kann:

SATZ 2. *Sei $f \in X_k^p$ und h eine positive Zahl. Für die durch*

$$(S_h f)(x) := \frac{1}{h} \int_0^h (T_u f)(x)\, du$$

definierte Stecklov-Funktion $S_h f$ zu f gelten dann die folgenden Aussagen:

(i) $S_h f \in X_{k+1}^p$

(ii) $\|(S_h f - f)^{(k)}\|_p \leqslant \omega_p(f^{(k)}, h)$

(iii) $\|(S_h f)^{(k+1)}\|_p \leqslant \dfrac{1}{h} \omega_p(f^{k)}, h)$

Beweis. (i) ist unmittelbar einzusehen. Wegen

$$(S_h f)^{(k)}(x) = \frac{1}{h}\int_0^h (T_u f^{(k)})(x)\,du \tag{1}$$

ist

$$(S_h f)^{(k+1)} = \frac{1}{h}(T_h f^{(k)} - f^{(k)}). \tag{2}$$

Aus (2) ergibt sich

$$\|(S_h f)^{(k+1)}\|_p = \frac{1}{h}\| T_h f^{(k)} - f^{(k)}\|_p \leqslant \frac{1}{h}\,\omega_p(f^{(k)}, h).$$

(ii) beweisen wir nur für den Fall $1 \leqslant p < \infty$. Mit (1) folgt

$$\begin{aligned}|(S_h f)^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)|^p &= \left|\frac{1}{h}\int_0^h (f^{(k)}(x+u) - f^{(k)}(x))\,du\right|^p \\ &\leqslant \frac{1}{h^p}\left(\int_0^h |f^{(k)}(x+u) - f^{(k)}(x)|^p\,du\right)\left(\int_0^h du\right)^{p/q} \\ &= \frac{1}{h}\int_0^h |f^{(k)}(x+u) - f^{(k)}(x)|^p\,du\end{aligned}$$

und daraus weiter

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b |(S_h f)^{(k)}(x) - f^{(k)}(x)|^p\,dx \\ &\leqslant \frac{1}{h}\int_0^h \left(\frac{1}{b-a}\int_a^b |f^{(k)}(x+u) - f^{(k)}(x)|^p\,dx\right)du \\ &\leqslant \omega_p(f^{(k)}, h)^p.\end{aligned}$$

2. Präkompaktheit und gleichmässige Approximierbarkeit

Sei R ein metrischer Raum und $\mathbb{F}$ eine Teilmenge von R. Dann ist $\mathbb{F}$ präkompakt, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele $f_1, \dots, f_n \in R$ gibt, so daß

$$\bigcup_{\nu=1}^{n} U(f_\nu, \epsilon)$$

die Menge $\mathbb{F}$ überdeckt.

Der folgende Satz beinhaltet die Sätze von Arzelà–Ascoli und Kolmogoroff–Riesz (vgl. [3], p. 93–94), durch die präkompakte Mengen in $C[a, b]$ bzw. $L^p(a, b)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ charakterisiert werden:

SATZ 3. *Sei $\mathbb{F}$ eine Teilmenge von X_0^p. $\mathbb{F}$ ist genau dann präkompakt, wenn $\mathbb{F}$ beschränkt ist und für*

$$\omega_p(\mathbb{F}, t) := \sup_{f \in \mathbb{F}} \omega_p(f, t) \qquad \lim_{t \to 0} \omega_p(\mathbb{F}, t) = 0$$

gilt.

DEFINITION.

$$\mathbb{F}_k^p := \{f \in X_{k+1}^p \mid \| f^{(k+1)} \|_p \leqslant 1\}$$
$$\hat{\mathbb{F}}_k^p := \{f \in \mathbb{F}_k^p \mid f^{(\kappa)}(a) = 0 \qquad (\kappa = 0, 1, \ldots, k)\}$$

SATZ 4. *Die Mengen $\hat{\mathbb{F}}_k^p \subseteq X_0^p$ sind präkompakt.*

Beweis. Für $f \in \hat{\mathbb{F}}_k^p$ folgt aus

$$f^{(k)}(x) = \int_a^x f^{(k+1)}(t)\, dt$$

die Abschätzung

$$| f^{(k)}(x)| \leqslant (b - a)$$

und hieraus

$$\| f^{(k)} \|_p \leqslant (b - a). \tag{3}$$

Es genügt deshalb zu zeigen, daß $\hat{\mathbb{F}}_0^p$ präkompakt ist, denn für $k \geqslant 1$ gilt wegen (3) die Inklusion

$$\hat{\mathbb{F}}_k^p \subseteq (b - a)\, \hat{\mathbb{F}}_{k-1}^p .$$

Aus (3) folgt die Beschränktheit von $\hat{\mathbb{F}}_0^p$.

Wegen

$$f(x + h) - f(x) = \int_x^{x+h} f'(u)\, du \qquad \text{für} \quad f \in \hat{\mathbb{F}}_0^p$$

gilt im Falle $1 \leqslant p < \infty$ für $h > 0$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a} \int_a^b | f(x + h) - f(x)|^p\, dx &\leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_x^{x+h} | f'(u)|\, du\right)^p dx \\
&\leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_x^{x+h} | f'(u)|^p\, du\right)\left(\int_x^{x+h} du\right)^{p/q} dx \\
&= h^{p/q} \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\int_x^{x+h} | f'(u)|^p\, du\right) dx \\
&= h^{p/q} \frac{1}{b-a} \int_a^b | f'(u)|^p \left(\int_{u-h}^{u} dx\right) du \\
&= h^p \frac{1}{b-a} \int_a^b | f'(u)|^p\, du \leqslant h^p;
\end{aligned}$$

also ist

$$\omega_p(f, t) \leqslant t \qquad \text{für} \quad f \in \hat{\mathbb{F}}_0^p \qquad (1 \leqslant p < \infty).$$

Letzteres gilt trivialerweise auch im Falle $p = \infty$. Aus Satz 3 folgt dann die Präkompaktheit von $\hat{\mathbb{F}}_0^p$.

Sei $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq R$ eine aufsteigende Folge endlich-dimensionaler Unterräume eines normierten Raumes R und $\mathbb{F}$ eine Teilmenge von R. Dann heißt $\mathbb{F}$ gleichmäßig approximierbar (bzgl. der U_n), wenn $\mathbb{F}$ beschränkt ist und für den Approximationsgrad $\delta(\mathbb{F}, U_n) := \sup_{f \in \mathbb{F}} \delta(f, U_n)$ von $\mathbb{F}$ bzgl. U_n $\lim_{n \to \infty} \delta(\mathbb{F}, U_n) = 0$ gilt.

Der folgende Satz aus [3], p. 44 besagt, daß in gewissen Fällen Präkompaktheit und gleichmäßige Approximierbarkeit äquivalent sind:

SATZ 5. *Ist $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq R$ eine aufsteigende Folge endlich-dimensionaler Unterräume eines normierten Raumes R und die Vereinigung der U_n dicht in R, so ist $\mathbb{F} \subseteq R$ genau dann gleichmäßig approximierbar, wenn $\mathbb{F}$ präkompakt ist.*

3. DER ALLGEMEINE JACKSON-SATZ

Für die Überlegungen dieses Abschnitts setzen wir voraus, daß $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq X_0^p$ eine aufsteigende Folge endlich-dimensionaler Unterräume von X_0^p ist. U bezeichnet im folgenden die Vereinigung aller U_n $(n = 1, 2, \ldots)$.

Der folgende Satz gibt notwendige Bedingungen dafür an, daß für X_k^p bei Approximation durch die Unterräume U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ein Satz vom Jackson-Typ gilt:

SATZ 6. *Sei c eine positive Konstante und $\{\gamma_n\}_1^\infty$ eine Nullfolge, so daß für alle $f \in X_k^p$ die Abschätzung*

$$\delta(f, U_n) \leqslant c\, \omega_p(f^{(k)}, \gamma_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

gilt. Dann gehören die Funktionen $h_0, h_1, \ldots, h_k$ $(h_\kappa(x) = x^\kappa)$ zu U_n $(n = 1, 2, \ldots)$, und U ist dicht in X_0^p.

Beweis. Da für $0 \leqslant \kappa \leqslant k$ $\omega_p(h_\kappa^{(k)}, t) \equiv 0$ ist, folgt aus (4) $\delta(h_\kappa, U_n) = 0$ und somit $h_\kappa \in U_n$, da U_n abgeschlossen ist. Weiter gilt nach Hilfssatz 1 für $f \in X_k^p$

$$\omega_p(f^{(k)}, \gamma_n) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Folglich ist jedes $f \in X_k^p$ durch Funktionen aus U approximierbar, d.h. es gilt $X_k^p \subseteq \bar{U}$, und somit ist U dicht in X_0^p.

Die in Satz 6 genannten notwendigen Bedingungen sind bemerkenswerterweise auch hinreichend für die Gültigkeit eines Satzes vom Jackson-Typ:

SATZ 7. *Gehören* $h_0, h_1, \ldots, h_k$ $(h_\kappa(x) = x^\kappa)$ *zu* U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *und ist* U *dicht in* X_0^p, *folgt*

(i) $\eta_{\kappa,n} := \delta(\mathbb{F}_\kappa^p, U_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ $\qquad (\kappa = 0, 1, \ldots, k)$.

(ii) *Für alle* $f \in X_k^p$ *gilt im Falle* $k = 0$

$$\delta(f, U_n) \leqslant \left(1 + \frac{\eta_{0,n}}{h}\right) \omega_p(f, h) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

bzw. im Falle $k \geqslant 1$

$$\delta(f, U_n) \leqslant \left(\eta_{k-1,n} + \frac{\eta_{k,n}}{h}\right) \omega_p(f^{(k)}, h) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Dabei bedeutet h *eine beliebige positive Zahl. Wählt man speziell* $h = \eta_{0,n}$ *bzw.* $h = \eta_{k,n}/\eta_{k-1,n}$, *so gilt für alle* $f \in X_k^p$ *im Falle* $k = 0$

$$\delta(f, U_n) \leqslant 2\omega_p(f; \eta_{0,n}) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

bzw. im Falle $k \geqslant 1$

$$\delta(f, U_n) \leqslant 2\eta_{k-1,n}\omega_p\left(f^{(k)}; \frac{\eta_{k,n}}{\eta_{k-1,n}}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Bemerkung. Die Abschätzungen des Satzes 7 sind scharf für die Klasse $\mathbb{F}_k^p$ bis auf den Faktor 2.

Beweis. (i) Nach Taylor gilt für $f \in \mathbb{F}_\kappa^p$ $(0 \leqslant \kappa \leqslant k)$

$$f(x) = P_\kappa(x) + \int_a^x f^{(\kappa+1)}(t) \frac{(x-t)^\kappa}{\kappa!} \, dt \tag{5}$$

mit

$$P_\kappa(x) = \sum_{\nu=0}^{\kappa} \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!} (x-a)^\nu.$$

Aufgrund der Voraussetzungen ist $P_\kappa \in U_n$; ferner ist der zweite Summand in (5) eine Funktion aus $\hat{\mathbb{F}}_\kappa^p$. Deshalb ist

$$\mathbb{F}_\kappa^p = \hat{\mathbb{F}}_\kappa^p + \operatorname{lin}\{h_0, \ldots, h_\kappa\},$$

woraus sich

$$\delta(\mathbb{F}_\kappa^p, U_n) = \delta(\hat{\mathbb{F}}_\kappa^p, U_n) \tag{6}$$

ergibt. Da nach Satz 4 $\hat{\mathbb{F}}_\kappa^p$ präkompakt ist, folgt aus (6) mit Hilfe von Satz 5

$$\eta_{\kappa,n} = \delta(\hat{\mathbb{F}}_\kappa^p, U_n) \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

(ii) Ist $f \in X_\kappa^p$, so gelten nach Satz 2 für die Stecklov-Funktion

$$(S_h f)(x) = \frac{1}{h}\int_0^h f(x+t)\,dt$$

die Beziehungen

$$\|(f - S_h f)^{(k)}\|_p \leqslant \omega_p(f^{(k)}, h) \tag{7}$$

und

$$\|(S_h f)^{(k+1)}\|_p \leqslant \frac{1}{h}\,\omega_p(f^{(k)}, h). \tag{8}$$

Wir können nun annehmen, daß $\omega_p(f^{(k)}, h) > 0$ ist, da sonst f fast überall mit einem Polynom vom Grade $\leqslant k$ übereinstimmen würde und somit $\delta(f, U_n) = 0$ folgte. Nach (8) gilt dann

$$[h/\omega_p(f^{(k)}, h)](S_h f) \in \mathbb{F}_k^p;$$

also ist

$$\delta(S_h f, U_n) \leqslant \frac{1}{h}\,\omega_p(f^{(k)}, h)\,\eta_{k,n}. \tag{9}$$

Aus (7) folgt im Falle $k = 0$

$$\delta(f - S_h f, U_n) \leqslant \omega_p(f, h).$$

Daraus ergibt sich mit (9)

$$\begin{aligned}\delta(f, U_n) &\leqslant \delta(f - S_h f, U_n) + \delta(S_h f, U_n)\\ &\leqslant \left(1 + \frac{\eta_{0,n}}{h}\right)\omega_p(f, h).\end{aligned}$$

Im Falle $k \geqslant 1$ folgt aus (7)

$$\frac{1}{\omega_p(f^{(k)}, h)}(f - S_h f) \in \mathbb{F}_{k-1}^p;$$

also ist

$$\delta(f - S_h f, U_n) \leqslant \omega_p(f^{(k)}, h)\,\eta_{k-1,n}. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\delta(f, U_n) &\leqslant \delta(f - S_h f, U_n) + \delta(S_h f, U_n)\\ &\leqslant \left(\eta_{k-1,n} + \frac{\eta_{k,n}}{h}\right)\omega_p(f^{(k)}, h).\end{aligned}$$

LITERATUR

1. D. JACKSON, On approximation by trigonometric sums and polynomials, *Trans. Amer. Math. Soc.* **13** (1912), 491–515.
2. CH. MÜNTZ, Über den Approximationssatz von Weierstrass. In "Mathematische Abhandlungen", H. A. Schwarz (Ed.), pp. 303–312, Berlin 1914.
3. A. F. TIMAN, "Theory of Approximation of Functions of a Real Variable", Oxford, 1963.